Thunder Network Education

Il numero di Graham

Redatto da:	- Torbidone Christian (RaD, aka KillerBossOriginal)
Revisionato da:	- Borz Stefano (RaD, aka Steoo) - Placani Fabio (Ext, aka Sandwich)
Destinatario:	- Tutti (documento pubblico)
Data:	- 04/02/2025: Versione di base, matematica discreta, teoria di Ramsey, il numero di Graham - 07/02/2025: Approfondimento ed espansione degli argomenti - 08/02/2025: Correzione errori - 10/02/2025: Correzione errori - 31/03/2025: Correzione errori

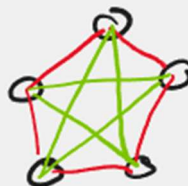
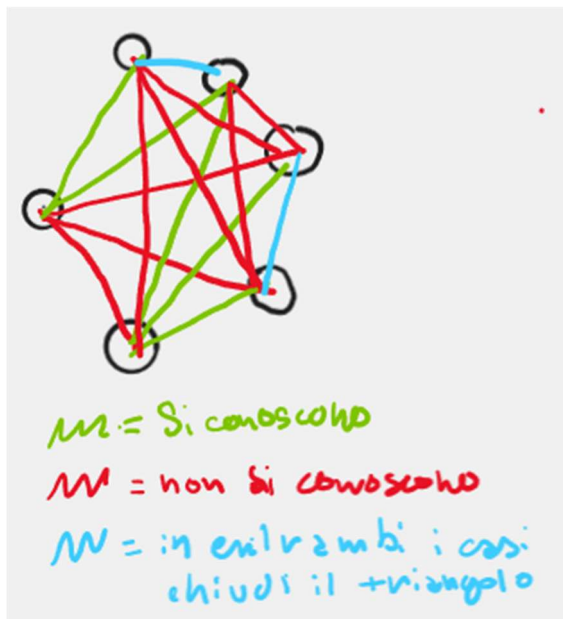
La matematica discreta

È una branca della matematica che si occupa di problemi con insiemi numerabili, senza richiedere quindi la continuità della funzione né la densità.

La teoria di Ramsey

La teoria di Ramsey è una branca della matematica discreta che si occupa di problemi come "qual è il minor numero di elementi necessario affinché una certa proprietà sia vera?"

Per esempio, vengono affrontate domande come la seguente:

"Quante persone devono esserci in una stanza, perché se ne possa trovare sempre un gruppo di 3, tali che ciascuna conosca tutte o nessuna delle altre?"

che convertito nella teoria dei grafi si espone come:

"Quanti devono essere i punti, perché debba esistere per forza un grafo completo di tre punti, ossia un triangolo, disegnato con lo stesso colore?"

La risposta è 6 persone, in quanto o le persone si conoscono o non si conoscono, se si richiede un quadrilatero, allora la risposta è 18, e così via.

Pochi di questi problemi sono risolti, alcuni hanno una approssimazione nella risposta, ma la teoria di Ramsey assicura una risposta in ogni caso.

Il problema di Graham

Il problema di Graham è un caso particolare della teoria di Ramsey:

Si consideri un ipercubo di n dimensioni. Si uniscano tutti i vertici, ottenendo un grafo completo con 2^{n} vertici. Si colorino quindi tutti gli spigoli con i colori rosso o blu, a piacere. Quale è il valore più basso di n per cui ogni possibile colorazione deve necessariamente contenere almeno un sottografo monocromo completo con quattro vertici giacenti su un piano?

Il problema completo

Considera un ipercubo di n dimensioni (con $n = 2$ è un quadrato, se $n = 3$ è un cubo e così via).

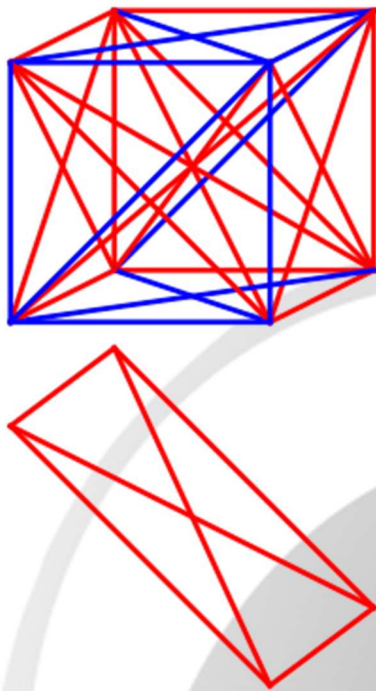
Scegli due vertici e disegna una linea dritta tra essi. Il colore di questa linea deve essere o rosso o blu. Ripeti questo processo per tutti i vertici (puoi scegliere un colore per ogni linea).

Quello che ottieni è un grafo, ovvero una collezione di vertici (gli "angoli" dell'ipercubo, 2^n in totale) e spigoli (segmenti che collegano ogni coppia di vertici, $2^{n-1}(2^n - 1)$ in totale) tra di essi, con ogni spigolo colorato di rosso o blu.

Se tu partissi da un ipercubo di n dimensioni, e anch'io partissi dallo stesso ipercubo, entrambi avremmo un grafo, entrambi avremmo lo stesso numero di vertici e di spigoli, ma essi potrebbero essere colorati in modo diverso. Nei fatti, ci sono $2^{2^{n-1}(2^n-1)}$ grafi ottenibili da questo processo, se si avesse un cubo tridimensionale, con 8 vertici e 28 spigoli, ognuno colorato di rosso o blu, i nostri due grafi sarebbero solo due dei $268.435.456$ possibili.

Viene posta la seguente domanda:

Puoi scegliere quattro vertici, ciascuno dei quali giace sullo stesso piano, in modo che tutti gli spigoli tra loro sono dello stesso colore?

La domanda non ha una risposta precisa, perché ovviamente dipende da come vengono colorati gli spigoli, riformuliamo la domanda, che da ora in avanti chiameremo Q.

Q: *Puoi scegliere quattro vertici, ciascuno dei quali giace sullo stesso piano, in modo che i quattro spigoli tra essi abbiano lo stesso colore, indipendentemente da come li hai colorati?*

Ciò provoca una altra affermazione intrinseca, ovvero che la risposta dipende da n, e per questo si crea una nuova domanda:

Quale è il più piccolo valore di n, chiamandolo N, per il quale la risposta alla domanda Q è sì?

Non è chiaro se c'è una soluzione per questa domanda, potrebbe essere possibile che la risposta sia *"non per ogni n"*, è stato provato tuttavia che ci sono alcuni valori per cui la risposta è sì, i teorici dei grafi hanno dimostrato che $6 \leq N \leq G$, dove G è il numero di Graham.

Nei tempi successivi si è ristretto il campo in modo più incisivo, alzando il limite minimo a 13 e abbassando il limite massimo.

Già Graham stesso sapeva che il limite superiore del problema era inferiore, ma seppur di poco nelle prime descrizioni lo riportò, per facilità, con il valore descritto nel presente documento.

Il numero di Graham

Il numero di Graham, come descritto nella sezione "Il problema completo", non è una soluzione a questo problema, in quanto tale non è ancora conosciuta con sicurezza, ma è il limite superiore della funzione. La dimostrazione è stata fatta da Ronald Lewis Graham e da Bruce Lee Rothschild.

La grandezza di questo numero è tale da non essere esprimibile in termini non matematici; infatti, immaginando di salvarlo in una rappresentazione binaria, mettendo un bit di tale numero, in un *volume di Planck* (circa $4{,}2 * 10^{-105} m^3$), lo spazio per immagazzinare questo numero sarebbe enormemente superiore allo spazio dell'universo conosciuto (circa $5.04 * 10^{32} \mathrm{a.l.}^3 \cong 4.2 * 10^{80} m^3$). Riassumendo servirebbe un numero di bit enormemente più grosso dei $\sim 10^{185}$ bit che teoricamente potrebbero esserci nell'universo.

Lo stesso problema si pone anche *con il numero di cifre del numero di Graham* e *con il numero di cifre del numero di cifre del numero di Graham* e così via.

Con gli attuali limiti di calcolo dei computer moderni, uno grande quanto l'intero universo sarebbe in grado di calcolarne appunto una minima parte di questo numero.

La rappresentazione del numero di Graham

La notazione a frecce di Knuth

Per rappresentare il numero di Graham è possibile utilizzare il metodo della notazione di Knuth, inventata dall'omonimo informatico per rappresentare numeri talmente grandi da non poter essere rappresentati altrimenti.

Come funziona questa notazione?
Potenza: $a \uparrow b = a^b$

- Tetrazione: $a \uparrow\uparrow b = {}^b a$;
  - esempio: $4 \uparrow\uparrow 5 = 4^{4^{4^{4^4}}} \cong 3.4 * 10^{38}$
  - esempio: $3 \uparrow\uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7.625.597.484.987$
- Tetrazione ricorsiva: $a \uparrow\uparrow\uparrow b$
  - $3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow (3 \uparrow\uparrow 3) = 3 \uparrow\uparrow (3^{3^3})$
- Livelli successivi: $3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow (3 \uparrow\uparrow\uparrow 3)$ e così via.

La grandezza del numero di Graham

Il numero di Graham (G) si può rappresentare come segue.

$$G = g_{64}, con \begin{cases} g_1 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 \\ g_n = 3 \uparrow^{g_{n-1}} 3 \end{cases}$$

- *Per renderti conto della grandezza di questo numero, riesci a calcolare l'ordine di grandezza dell'operazione* $3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3$*, ovvero solo **il primo livello*** $\boldsymbol{g_1}$*?.*

Il secondo livello sarebbe $g_2 = 3 \uparrow^{g_1} 3$*, ovvero 3 seguito da* g_1 *frecce.*

Scrivendo il numero in altri termini:

$3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \cdots 3$ dove il numero di frecce è

$3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \cdots 3$ dove il numero di frecce è

$3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \cdots 3$ dove il numero di frecce è

$3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \cdots 3$ dove il numero di frecce è

per un totale di 63 righe uguali fino ad arrivare a

$3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3$ dove il numero di frecce è 4.

Fonti del documento:

Sezione	Fonte	Archivio	Data
La matematica discreta	Wikipedia	Web Archive Wikipedia	04/02/2025
La teoria di Ramsey	Wikipedia	Web Archive Wikipedia	04/02/2025
Il numero di Graham	Wikipedia	Web Archive Wikipedia	04/02/2025
Il problema di Graham	Non reperibile	Web Archive Università di Adelaide	07/02/2025
La teoria di Ramsey	Bitman.name	Web Archive Bitman.name	07/02/2025
Domande guida ed attività	ChatGPT, modello O3 Mini		10/02/2025